积分策略

模式识别 / 例子	主要方法 / 操作

化简：

例：$\int \frac{x^2-1}{x+1}\,dx \to \int (x-1)\,dx$

1. 化简被积函数：

应用代数运算与各类恒等式。

识别：

基本积分形式

例：$\int x^3\,dx, \int \frac{1}{x}\,dx, \int e^x\,dx, \int \cos x\,dx$

2. 基本积分形式：

直接套用基本积分表公式。

（注意不含$\boxed{\text{对}}$与$\boxed{\text{反}}$(注记)）

模式：

- 含 $h(x)$ 与 $h'(x)\,dx$
- 含根式 $h(x) = \sqrt[n]{ax+b}$

例：$\int (2x+1)^5\,dx, \int xe^{x^2}\,dx, \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx,$
$\int \frac{\ln x}{x}\,dx, \int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$

3. 换元积分：

试令 $u = h(x)$

（对 $\sqrt[n]{ax+b}$，反解 x 并求 dx。）

模式：

- 不同类型函数乘积
- 含 $h(x)$ 为$\boxed{\text{对}}$或$\boxed{\text{反}}$
  （但若也含 $h'(x)\,dx$，试用换元积分）

例：$\int xe^x\,dx, \int x^2\cos x dx, \int e^x \sin x\,dx,$
$\int \ln x\,dx, \int \tan^{-1} x\,dx$

4. 分部积分：

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

- u 易微
- dv 易积（不选$\boxed{\text{对}}$与$\boxed{\text{反}}$；有时可令 $dv = dx$）
- $v\,du$ 不比原式难积

模式：

- $\frac{P(x)}{Q(x)}$

例：$\int \frac{x^2+1}{x^2-x}\,dx, \int \frac{3x+1}{(x+1)(x-2)}\,dx,$
$\int \frac{1}{x(x^2+4)}\,dx$

5a. 部分分式分解：

i) 假分式？$\to$ 长除法

ii) 分解分母 $Q(x)$

iii) 设/解部分分式

iv) 积分各项

模式：

- $\sin^m x \cos^n x$

例：$\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx, \int \cos^5 x\,dx,$
$\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$

5b. 三角积分 (类型 I)：

m **(sin)**	n **(cos)**	**策略**
奇	-	令 $u = \cos x$
-	奇	令 $u = \sin x$
偶	偶	降幂 (注记)

模式：

- $\tan^m x \sec^n x$
- $\cot^m x \operatorname{cosec}^n x$

例：$\int \tan^2 x \sec^4 x\,dx, \int \tan^3 x \sec x\,dx,$
$\int \tan^2 x \sec x\,dx, \int \sec^3 x\,dx$

5b. 三角积分 (类型 II)：

- $\tan x$：$= \frac{\sin x}{\cos x}$；令 $u = \cos x$
- $\sec x$：$\times \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$；令 $u = \sec x + \tan x$
- $\sec^n x$，n 奇 $(\geqslant 3)$：分部积分, $dv = \sec^2 x\,dx$

m **(tan)**	n **(sec)**	**策略**
奇	-	令 $u = \sec x$
-	偶 $(\geqslant 2)$	令 $u = \tan x$
偶 $(\geqslant 2)$	奇	转为仅含 $\sec x$

模式识别 / 例子	主要方法 / 操作
模式: • $\sin(ax)\cos(bx)$ • $\sin(ax)\sin(bx)$ • $\cos(ax)\cos(bx)$ 例: $\int \sin(5x)\cos(2x)\,dx$	**5b. 三角积分 (类型 III):** 积化和差 (注记)
模式: • 三角有理函数 例: $\int \frac{1}{2+\cos x}\,dx$	**5b. 三角积分 (类型 IV):** • 试令 $t = \tan\frac{x}{2}$ (注记) • 若仅含 $\sin^2 x, \cos^2 x, \tan x$，可试令 $t = \tan x$ (注记)
模式: • 含 $\sqrt{\pm x^2 \pm a^2}$ 例: $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$, $\int \frac{1}{(x^2+4)^{3/2}}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$	**5c. 三角换元:** 根式类型 — 换元代换 $\sqrt{a^2-x^2}$ — 令 $x = a\sin\theta,\ \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\sqrt{a^2+x^2}$ — 令 $x = a\tan\theta,\ \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $\sqrt{x^2-a^2}$ — 令 $x = a\sec\theta,\ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$ 用三角平方关系去掉根号。

注记

函数类型简称:

- $\boxed{\text{对}}$: 对数函数 (如 $\ln x, \log_a x$ 等)
- $\boxed{\text{反}}$: 反三角函数 (如 $\sin^{-1} x, \tan^{-1} x$ 等)

分部积分:

- 此形式便于判断与计算:

$$\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int u'\left(\int v\,dx\right)dx$$

降幂公式:

- $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$
- $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$
- $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

积化和差公式:

- $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$
- $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$
- $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

万能公式:

- $t = \tan\frac{x}{2}$
- $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$ （用倍角公式推导）
- 画直角三角形 → 找出其他三角函数值
- $x = 2\tan^{-1} t,\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$

简化换元:

- $t = \tan x$
- 画直角三角形 → 找出其他三角函数值
- $x = \tan^{-1} t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}$